日本の神聖な幾何学

フィゲロア・オファリル　ホセ　ミゲル
数学科

２０１３年１２月５日

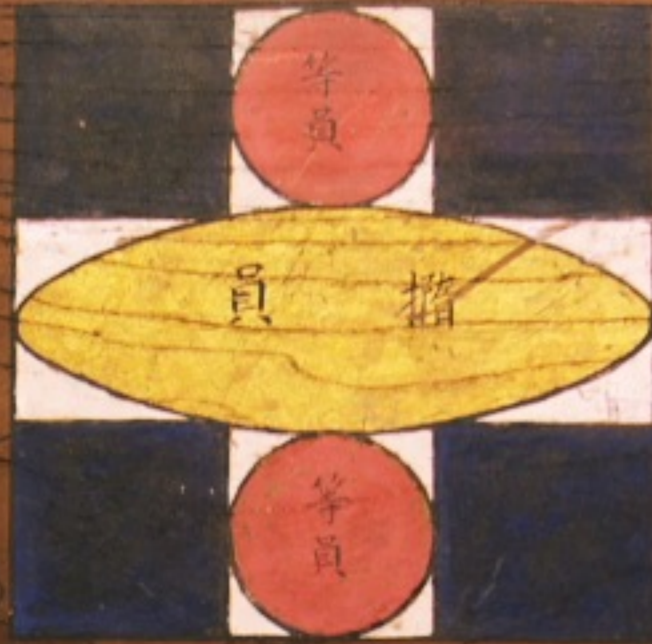
ムルシア大学

La geometría sagrada del Japón

José Miguel Figueroa O'Farrill
School of Mathematics
THE UNIVERSITY OF EDINBURGH

5 - XII - 2013
Universidad de Murcia

今有如圖交畫員二个而其罅容小員不…
員徑五百九十三寸問中
員徑幾何
答曰中員徑四百六十二寸有奇
術曰置一十七个平方開之内减一个餘乘大徑四除之得中徑合問



今有如圖方内容擶員一个等
員二个等方四个等員徑七千三
百九十二寸問等方面幾何
答曰等方面七千六百七寸有奇
術曰置五个平方開之加二
个平方開之乘等徑半之得
等方面合問

今有如圖員缺内隔弧背容
甲員一个乙員三个甲員徑五寸
乙員徑四寸問弦幾何
答曰弦一十六寸
術曰以乙徑除甲徑内减一
个餘平方開之以除乙徑倍
之得弦合問

關流宗統六傳

El contexto histórico

Período Edo (1600-1868)

Tokugawa Ieyasu
(1543 - 1616)

Tokugawa Yoshinobu
(1837 - 1913)

Durante las primeros años del shogunato Tokugawa mandó Japón embajadas a Europa y América…

Hasekura Tsunenaga
(1571 - 1622)

alias Francisco Felipe Faxicura

Tokugawa Iemitsu
(1604 - 1651)

鎖
国

(Sakoku)

Desde los 1630s hasta 1853, Japón estuvo prácticamente cerrado: ningún ciudadano podía entrar o salir del país, bajo pena de muerte.

Aunque hubo excepciones…

出島

(Dejima)

El renacimiento japonés

歌舞伎

(Kabuki)

文
楽

(Bunraku)

浮世絵

(Ukiyo-e)

春画

(Shunga)

生け花

(Ikebana)

茶道

(Sadō)

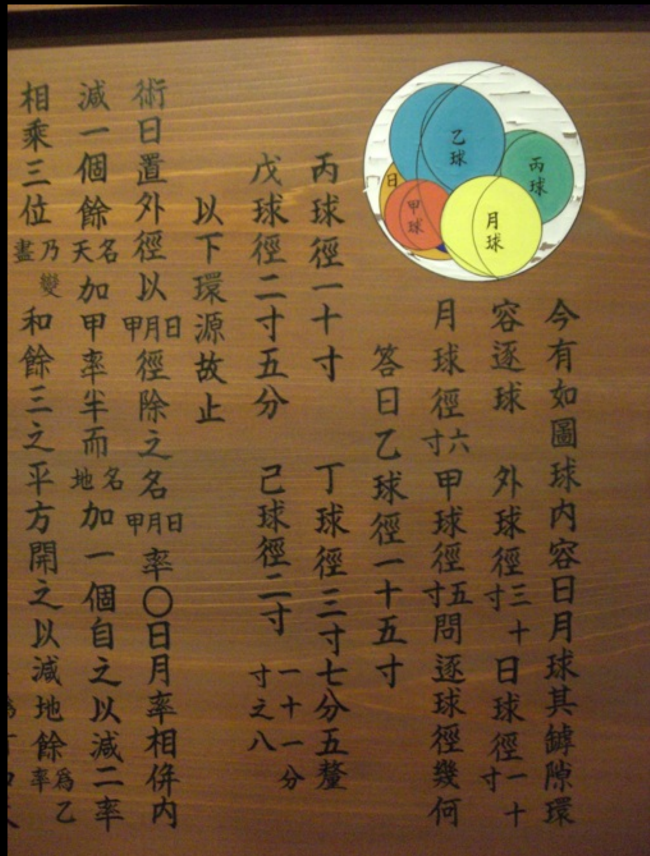
ふるいけや
かわずとびこむ
みずのおと

un viejo estanque,
se zambulle una rana,
murmura el agua

Matsuo Bashō
(1644 - 1694)

俳句

(Haiku)



算額

(Sangaku)

La religión en Japón

仏教

(Bukkyō)

- Se importó de China en el siglo VI
- Impulsó el uso de los *kanji*
- Era la religión preferida de los *samurai* y en particular de los Tokugawa
- Se profesa en templos (寺)
- Es la religión de los grandes acontecimientos: bodas, funerales,…

神
道

(Shintō)

- Basada en el animismo japonés
- "Ocho millones" de *kami* (神)
- Se profesa en santuarios (神社)
- Religión del "día a día"
- En la restauración Meiji se convierte en la religión oficial del Japón

Existe una tradición de colgar tablas debajo de los aleros de los tejados en templos y santuarios.

Eran típicas las tablas con caballos : animales relativamente raros y agradables a los *kami*.

Durante el período Edo los caballos empezaron a ser sustituidos por *sangaku*.

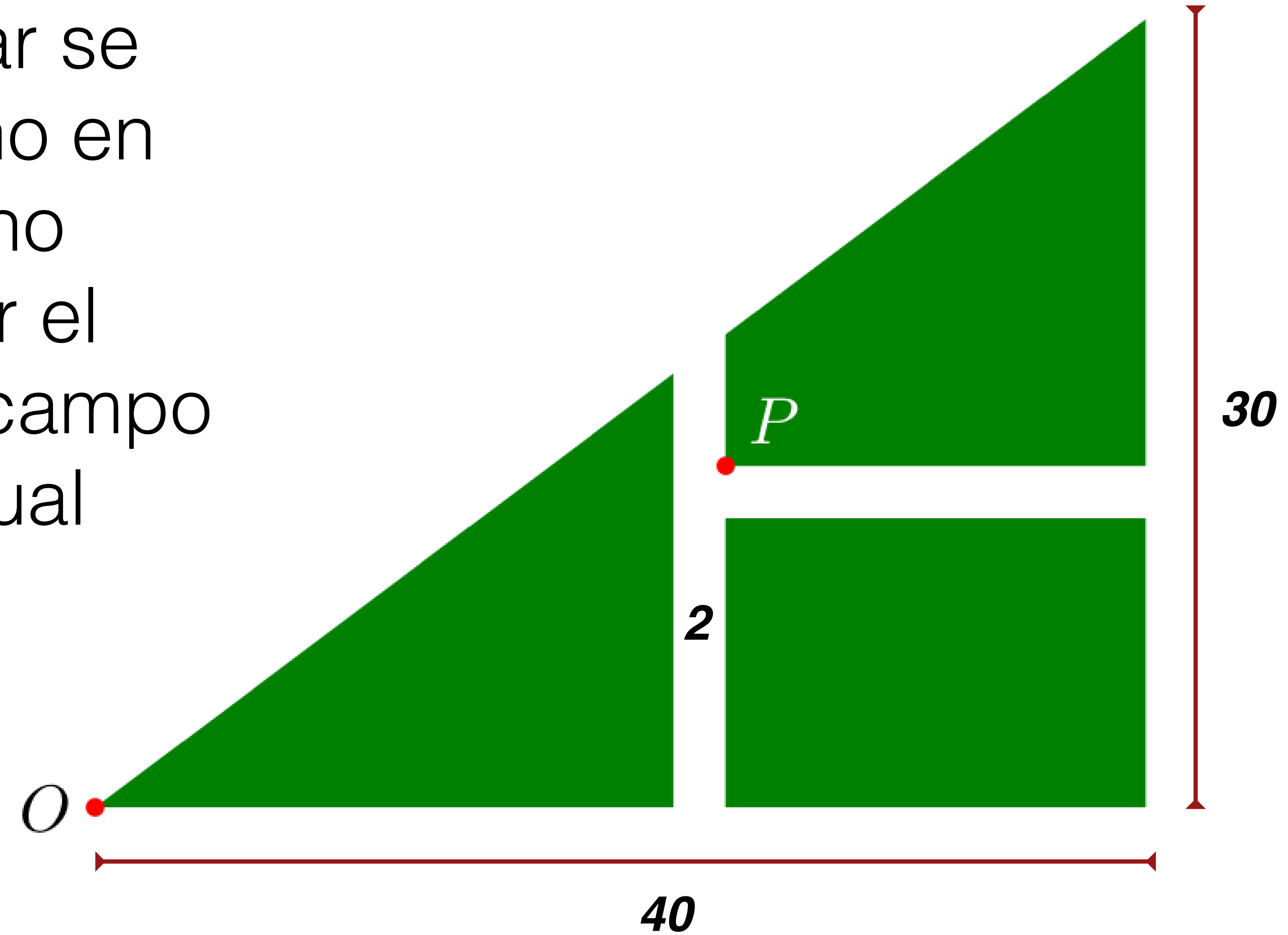
Sangaku en términos generales :

- 880 *sangaku* sobreviven
- Cientos más se conocen gracias a crónicas y libros que se publican durante el período Edo
- El primer *sangaku* que se conoce data de 1668
- El más antiguo de los existentes data de 1683
- Unas 2/3 partes están colgados en santuarios y el resto en templos budistas, distribuidos de manera uniforme por la geografía japonesa
- La primera colección se publica en 1789
- En la mayoría de los casos, un mismo *sangaku* contiene varios problemas y la decoración es muy colorida
- Hay problemas geométricos, de cálculo infinitesimal y diofánticos

Algunos problemas típicos

Hay problemas para todas las edades y habilidades.

En un campo triangular se quiere hacer un camino en forma de **T** de un ancho constante. Determinar el camino que divide el campo en tres parcelas de igual superficie.

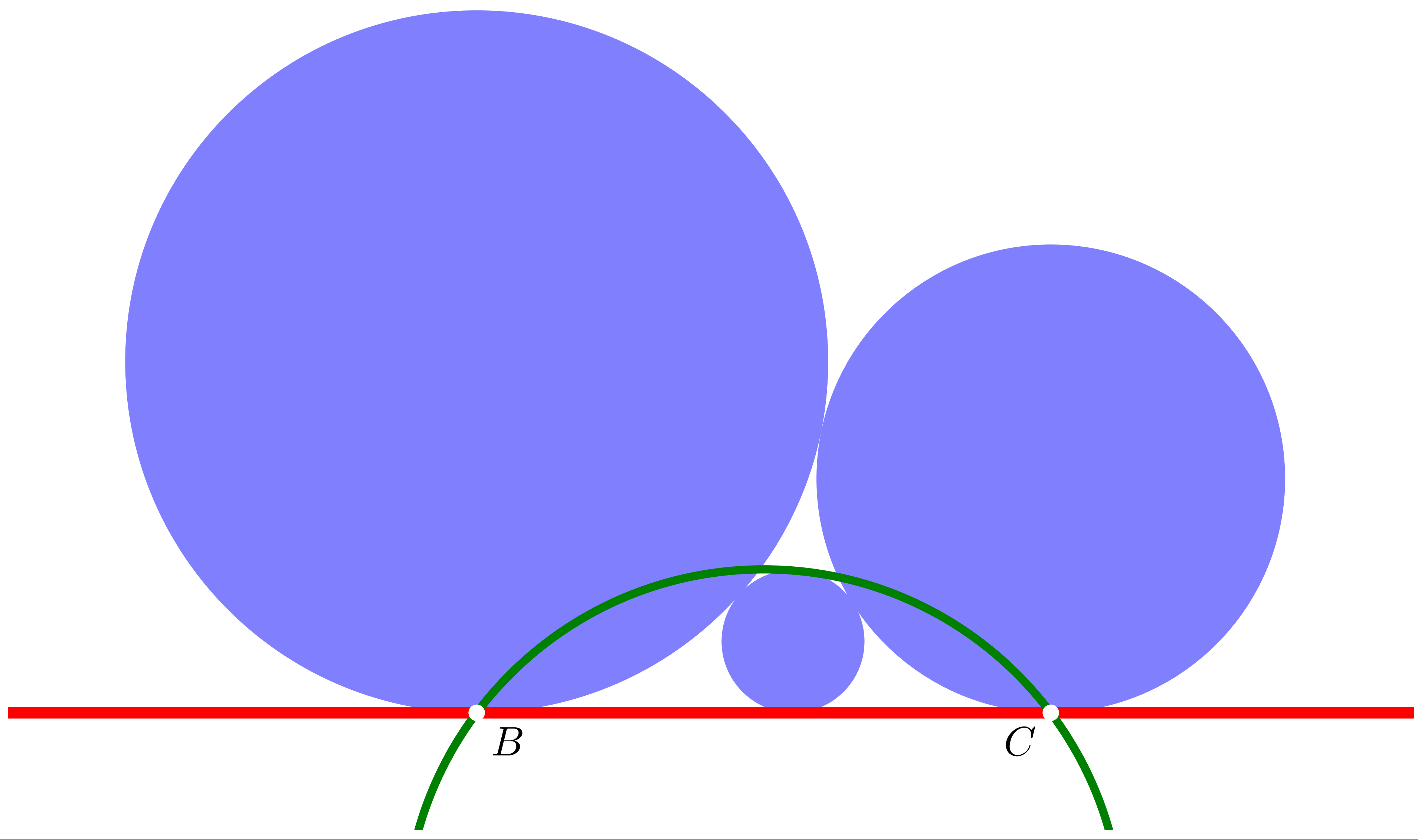


$$P = \left(\frac{2}{9}\left(10+\sqrt{9406}\right), \frac{1}{24}\left(214+\sqrt{9406}\right)\right)$$

Dos círculos tangentes entre sí son también tangentes a una misma recta en puntos *B* y *C*. Un tercer círculo es tangente a ambos círculos y a la misma recta.

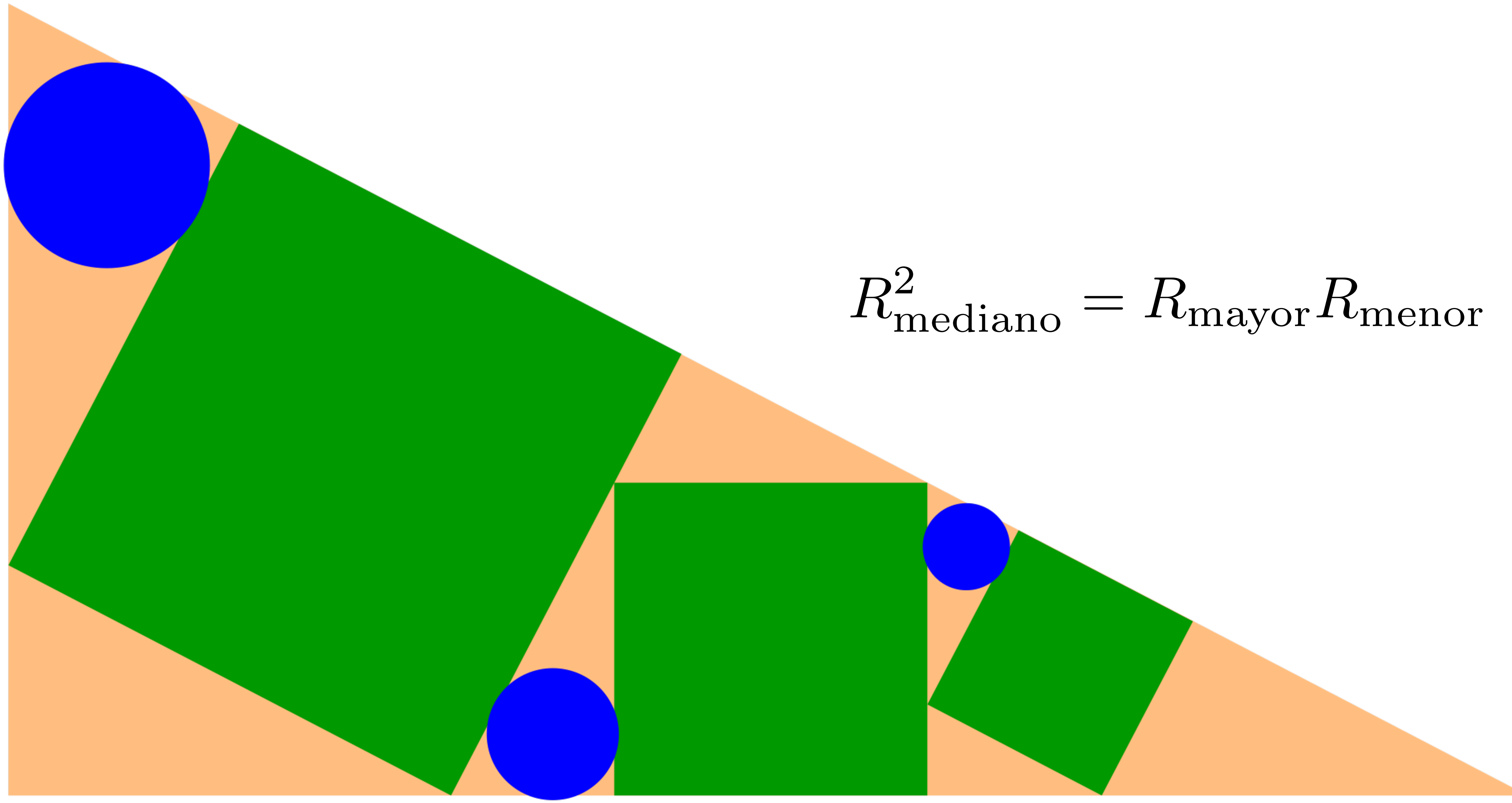
Fijemos *B* y *C* pero variemos los radios de los dos primeros círculos de tal manera que sigan siendo tangentes entre sí. Demostrar que existe un círculo fijo que pasa por *B* y *C* y es tangente al tercer círculo internamente.

$$R = \frac{5}{8}|BC|$$



(Miyagi, ?, perdido)

¿Cómo están relacionados los radios de los círculos?

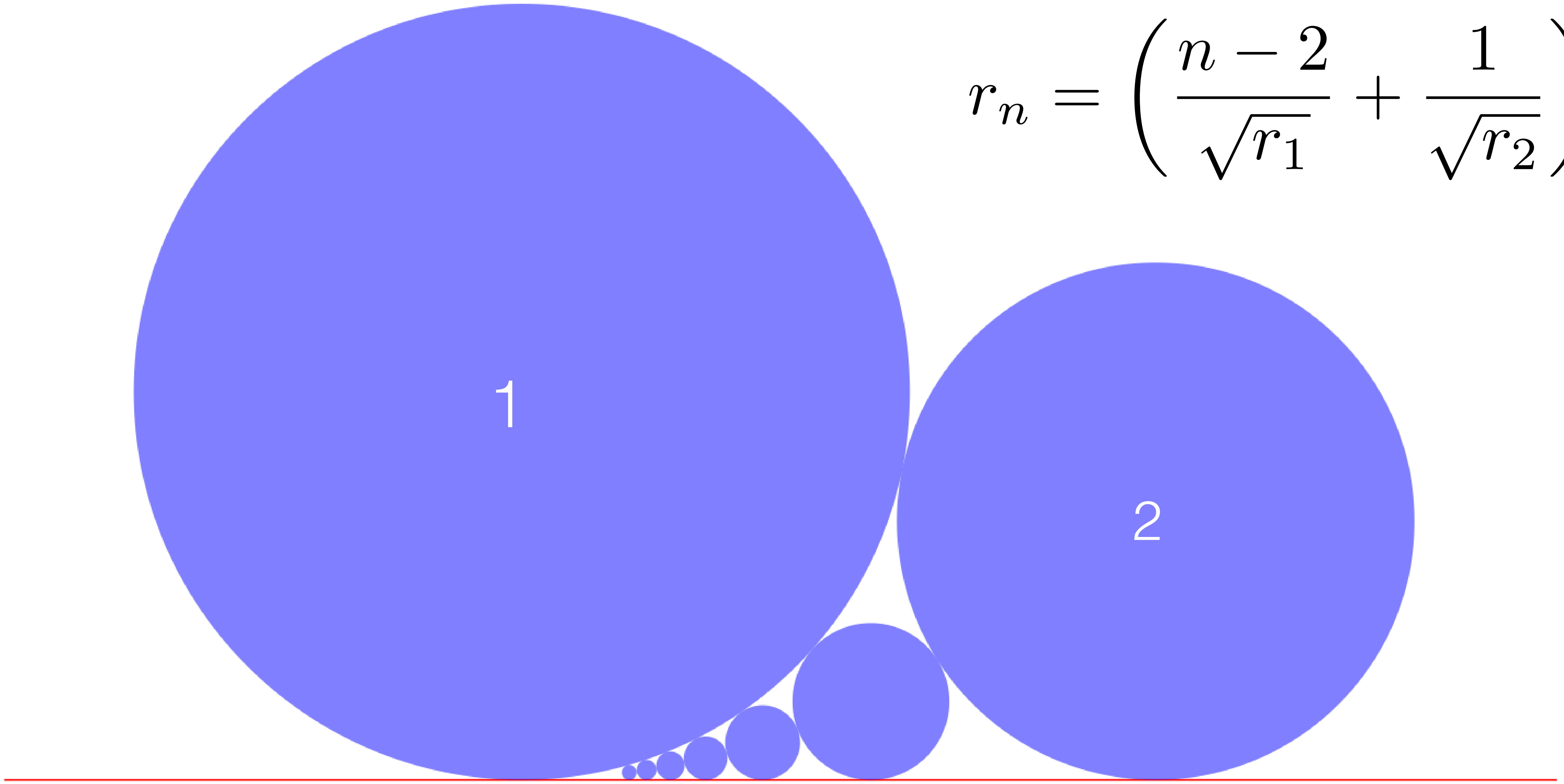


$$R^2_{\text{mediano}} = R_{\text{mayor}} R_{\text{menor}}$$

(Miyagi,1913, existe)

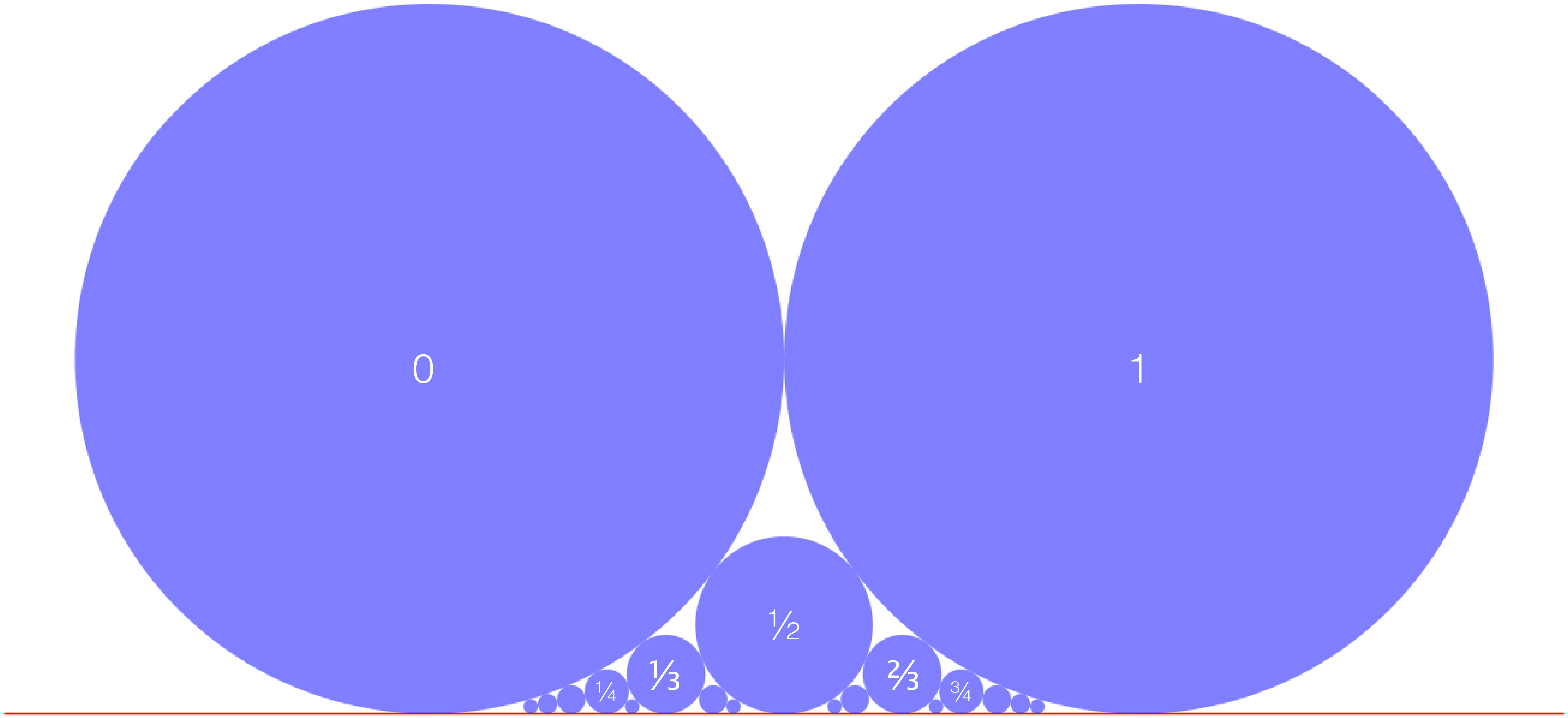
Determinar el radio del enésimo círculo en función de los radios de los dos primeros.

$$r_n = \left(\frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \right)^{-2}$$



(Tōkyō, 1789, perdido)

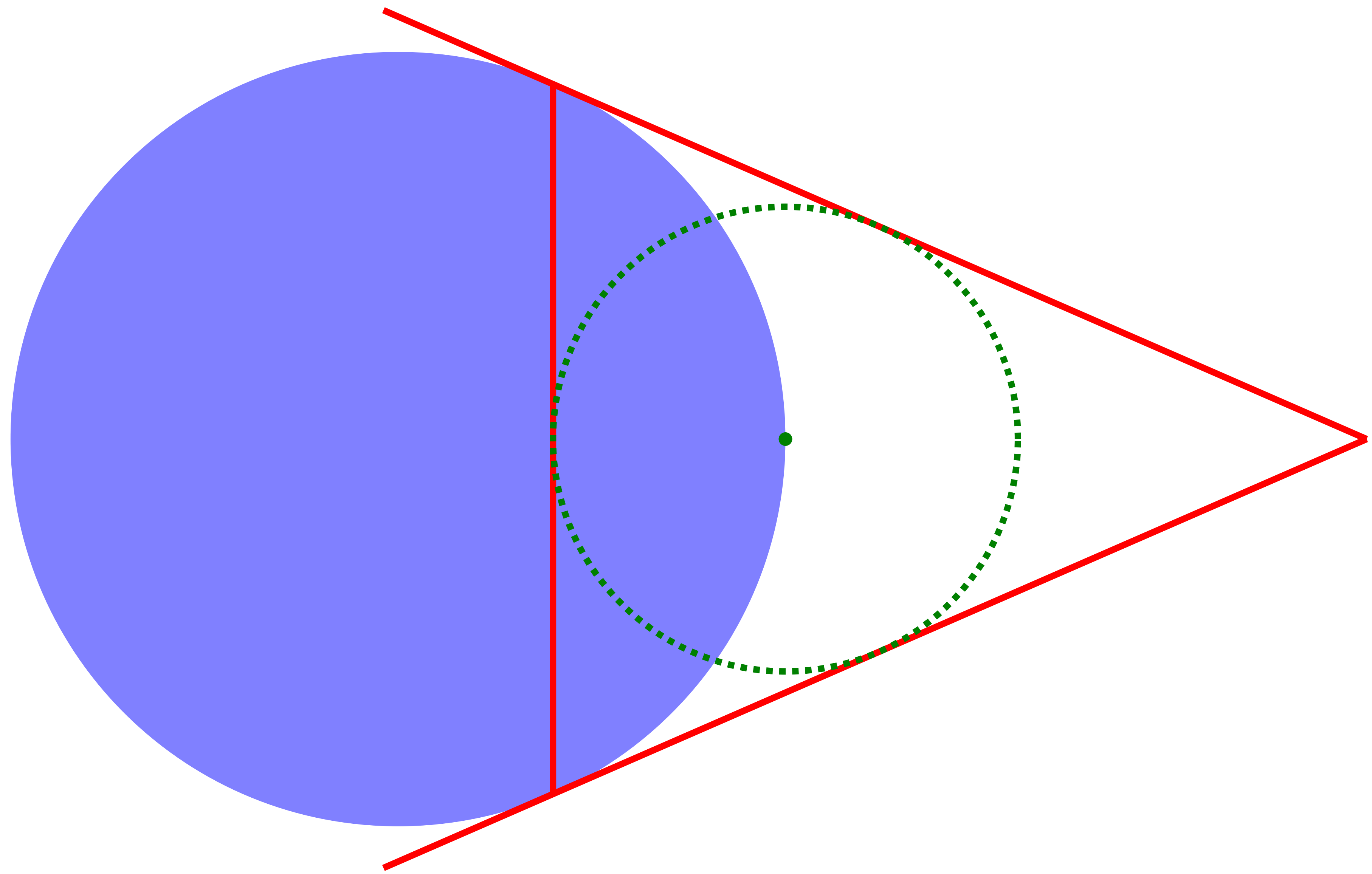
Este problema conduce de manera natural a los *círculos de Ford* :



$$r_{p/q} = \frac{1}{(2q)^2}$$

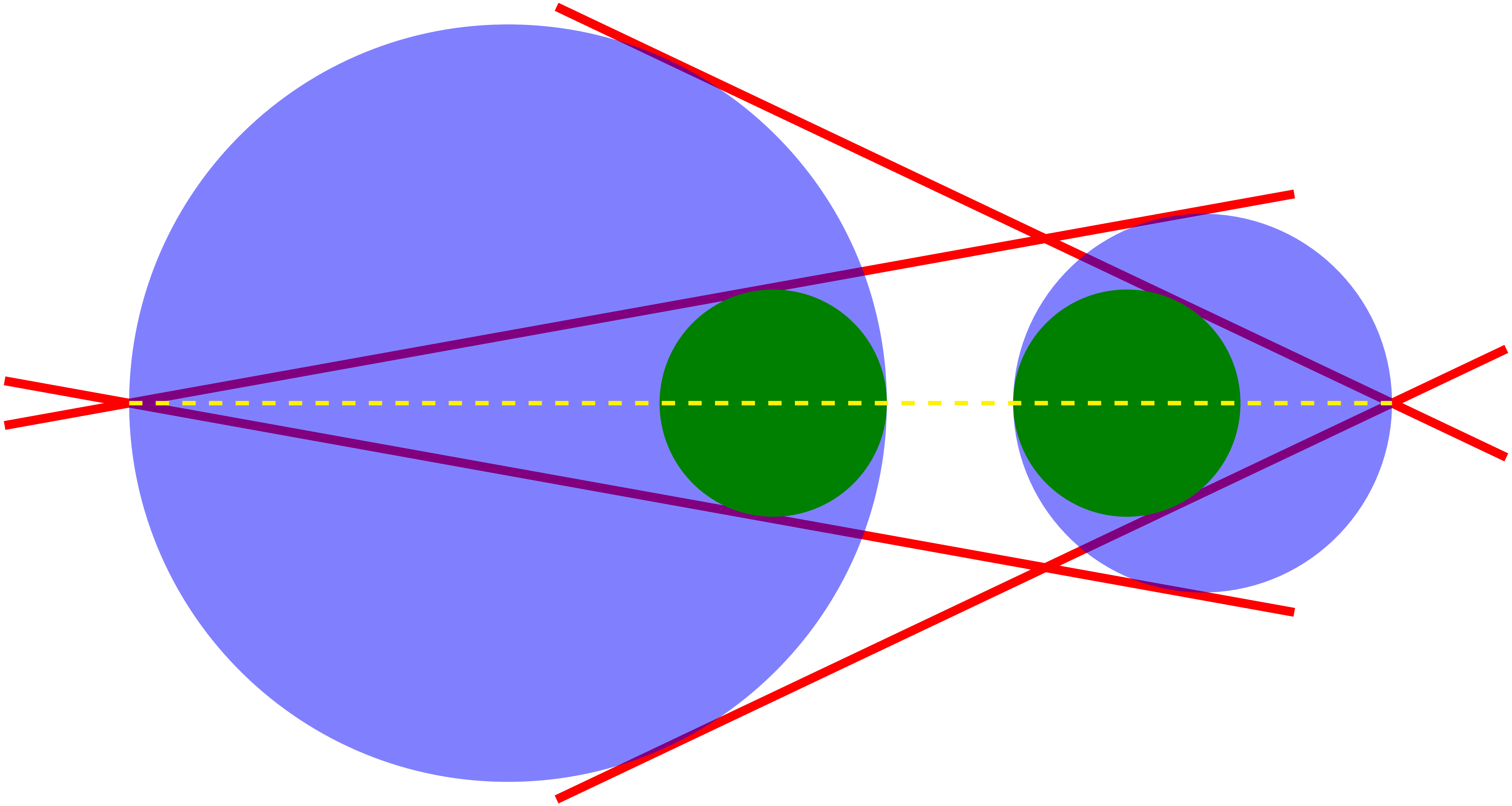
Pero no hay evidencia de ellos en el período Edo.

El incentro del triángulo formado por dos tangentes a un círculo yace en el círculo.



(Ibaraki, 1896, perdido)

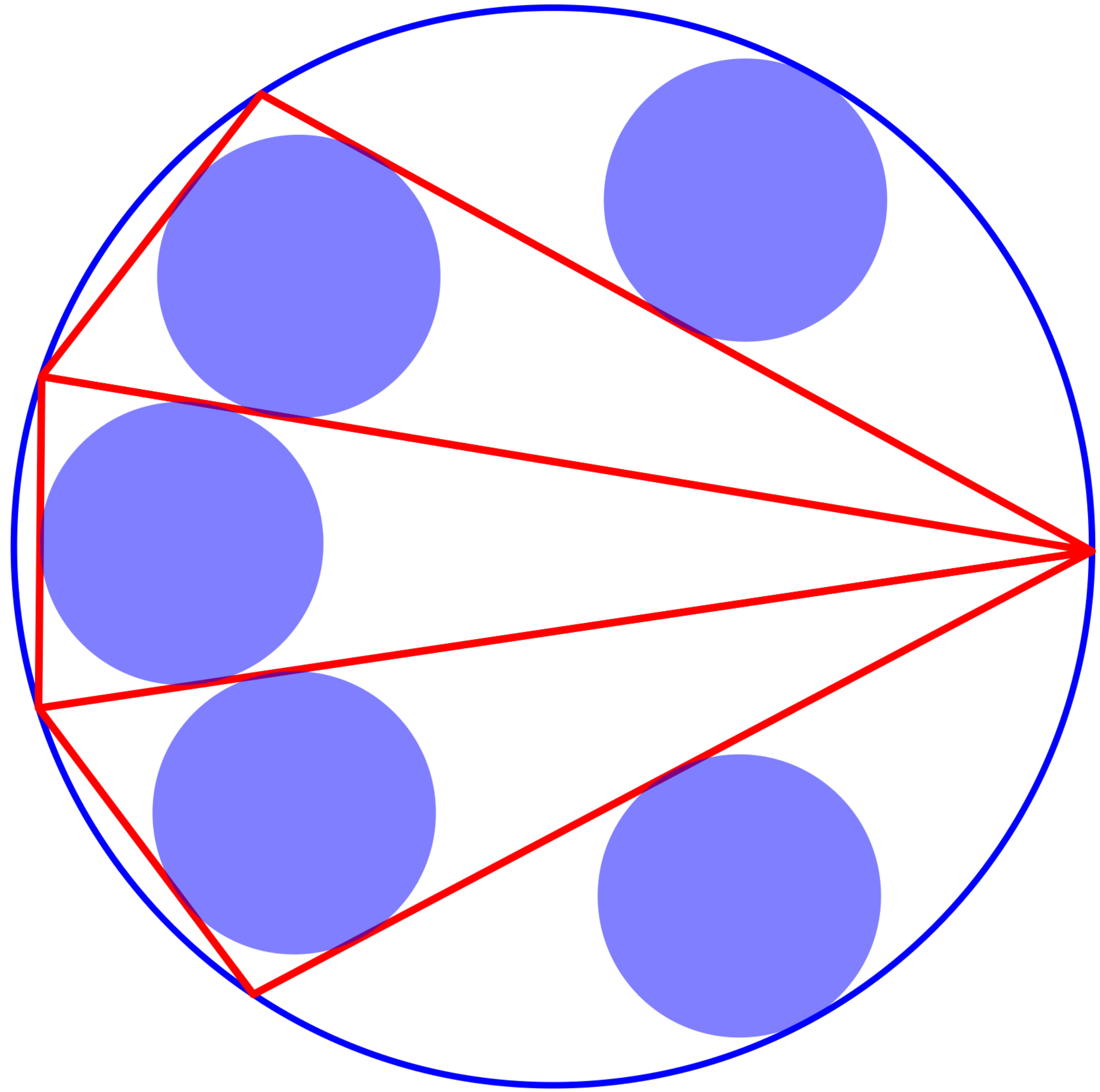
Los círculos verdes tienen el mismo radio.



(Aichi, 1842, perdido)

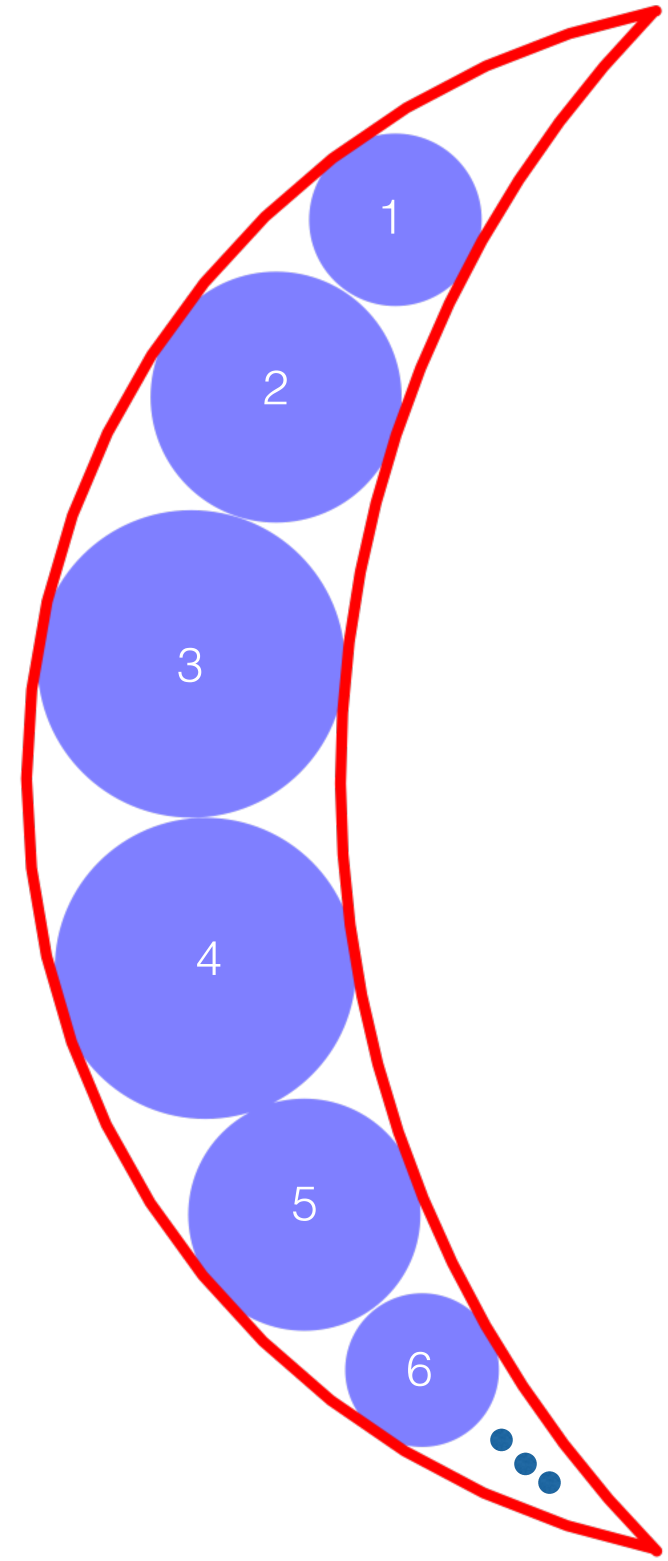
¿Cuál es la relación entre el radio de los círculos pequeños y el círculo grande?

$$r = \frac{\sqrt{114793} - 301}{144} R$$



(Miyagi, 1826, perdido)

Expresar el radio del enésimo círculo ($n \geq 4$) en función de los radios de los tres primeros.



$$r_4 = \frac{r_1 r_2 r_3^2}{(r_1 + r_3) r_2^2 - r_1 r_3^2}$$

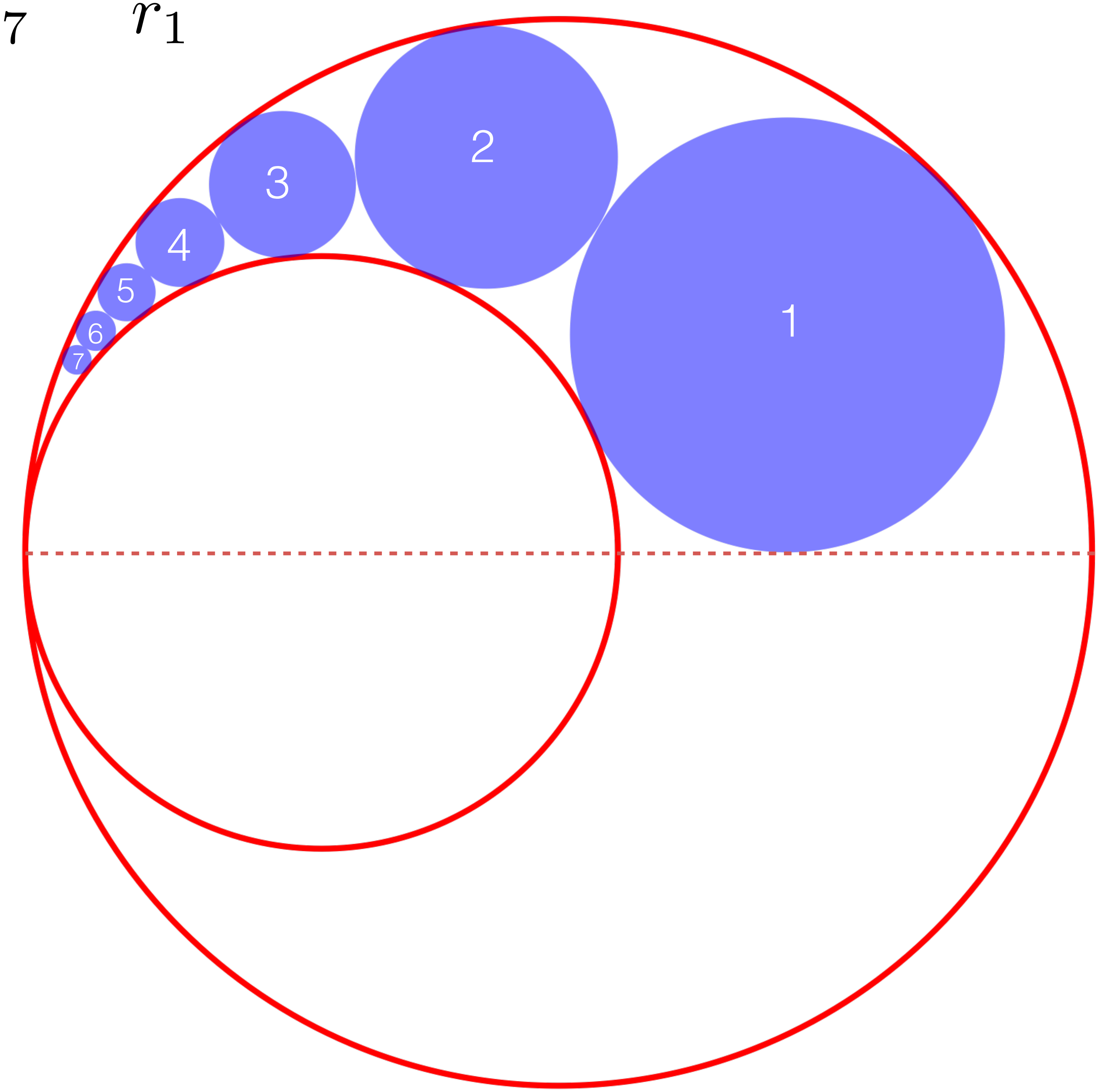
$$r_5 = \frac{r_1^2 r_3^3}{\left(r_2^2 - 2r_3^2\right) r_1^2 + \left(2r_2^2 r_3 - r_3^3\right) r_1 + r_2^2 r_3^2}$$

et cetera

(Fukushima, 1852, existe?)

Demostrar que $\dfrac{7}{r_4} = \dfrac{2}{r_7} + \dfrac{5}{r_1}$

Hoy lo resolvemos fácilmente usando inversión, pero ese método no existía en Japón durante el período Edo.



(Gunma, 1814, existe)

No todos los problemas son geométricos. También los hay diofánticos.

$$x - y = 61741$$
$$y - z = 14197$$
$$\sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{y} + \sqrt[7]{z} = 12$$

$$x = 78125 = 5^7$$
$$y = 16384 = 4^7$$
$$z = 2187 = 3^7$$

El *sangaku* también da el resultado para enteros arbitrarios. La solución requiere resolver una ecuación de grado 49!

(Fukui, 1807,existe)

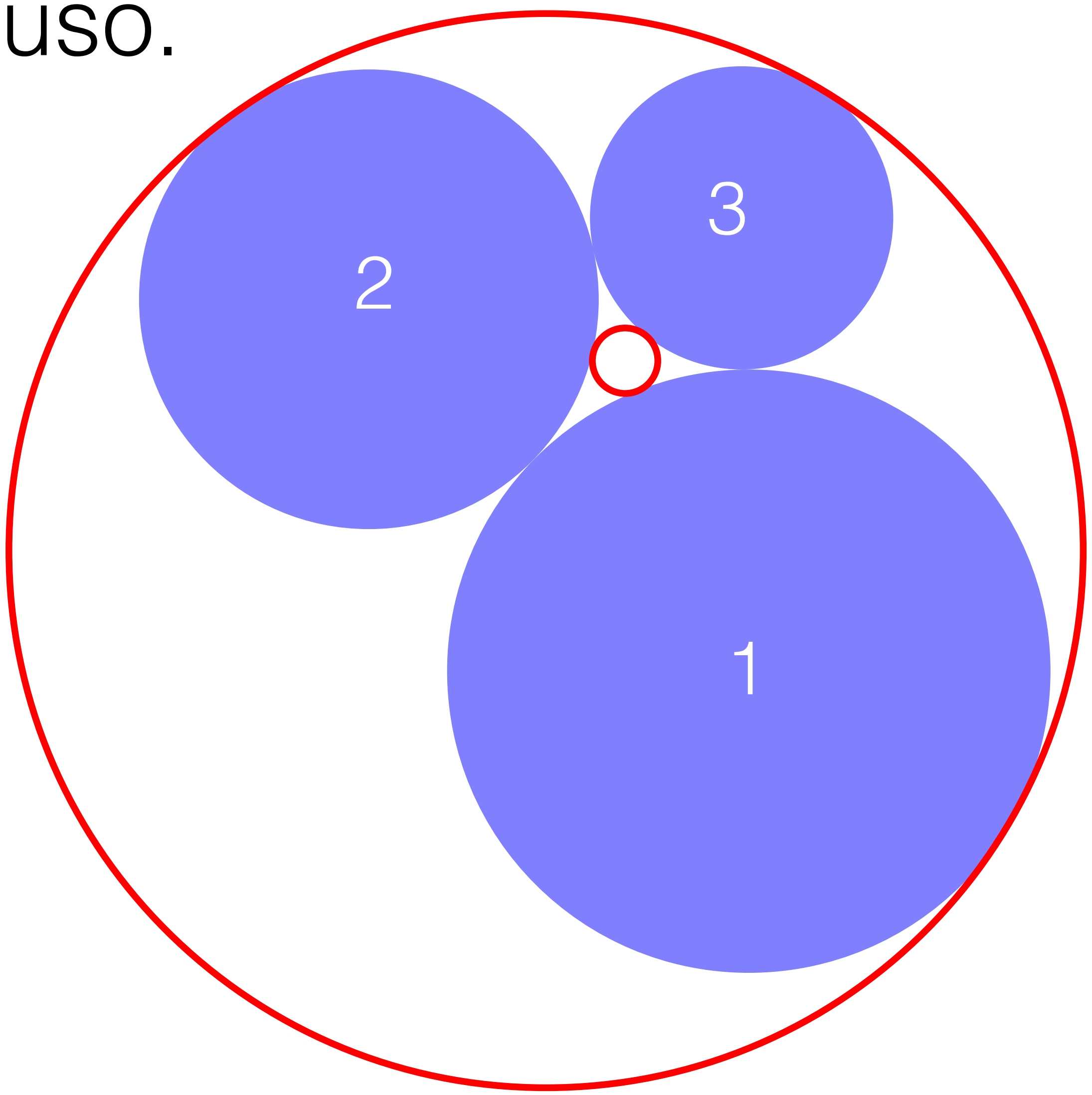
和算	y	洋算
(Wasan)		***(Yōsan)***

René Descartes
(1596 - 1650)

Isabel de Bohemia
(1618 - 1680)

En una carta de noviembre de1643, Descartes habla de una solución elegante de Isabel a un problema geométrico que él propuso.

Dados tres círculos, cada uno tangente a los otros dos, calcular el radio de un cuarto círculo tangente a los tres primeros.



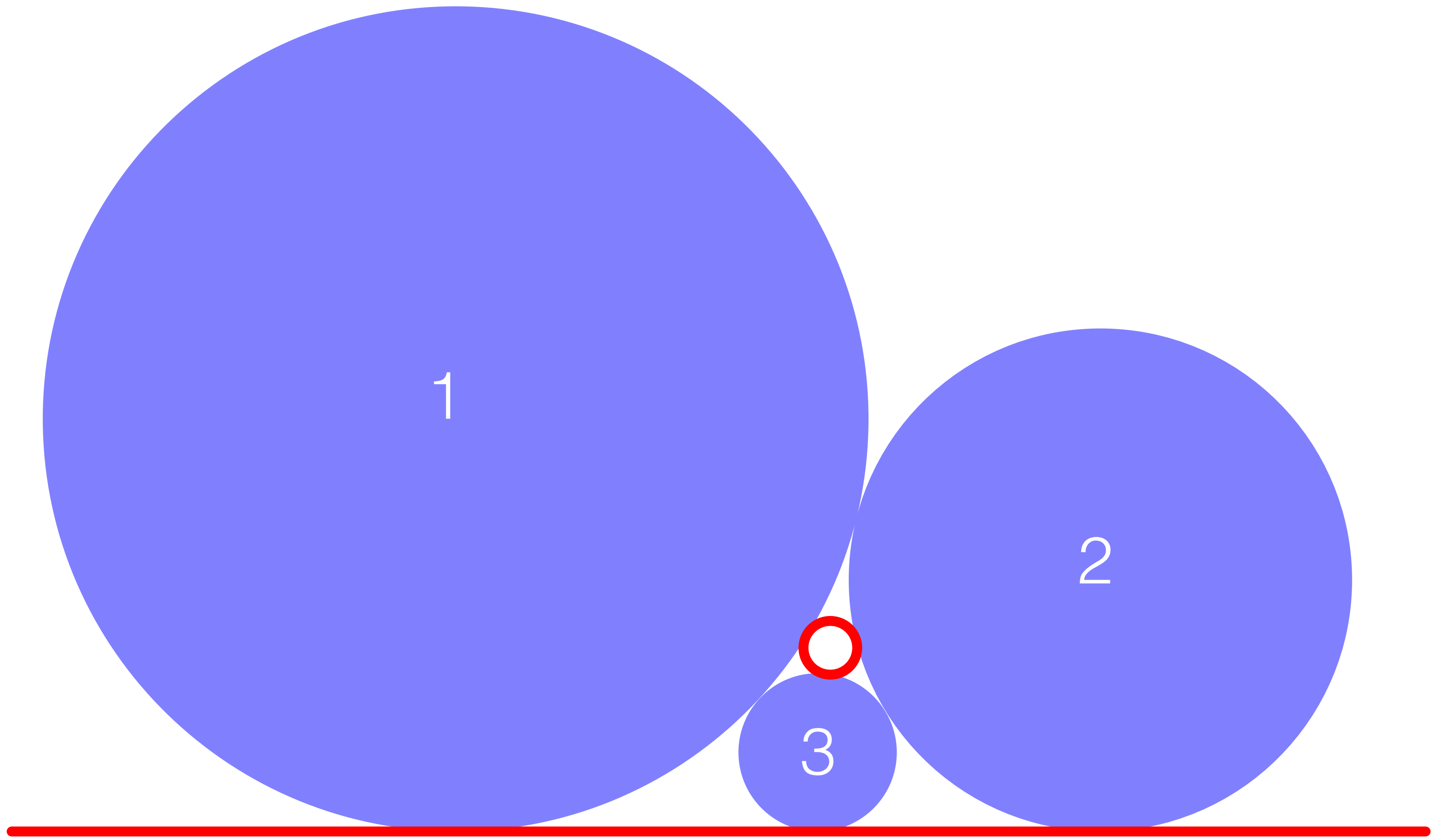
$$k_i = 1/r_i$$

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

$$\implies k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}$$

Un caso especial de este teorema es cuando uno de los círculos es una recta.

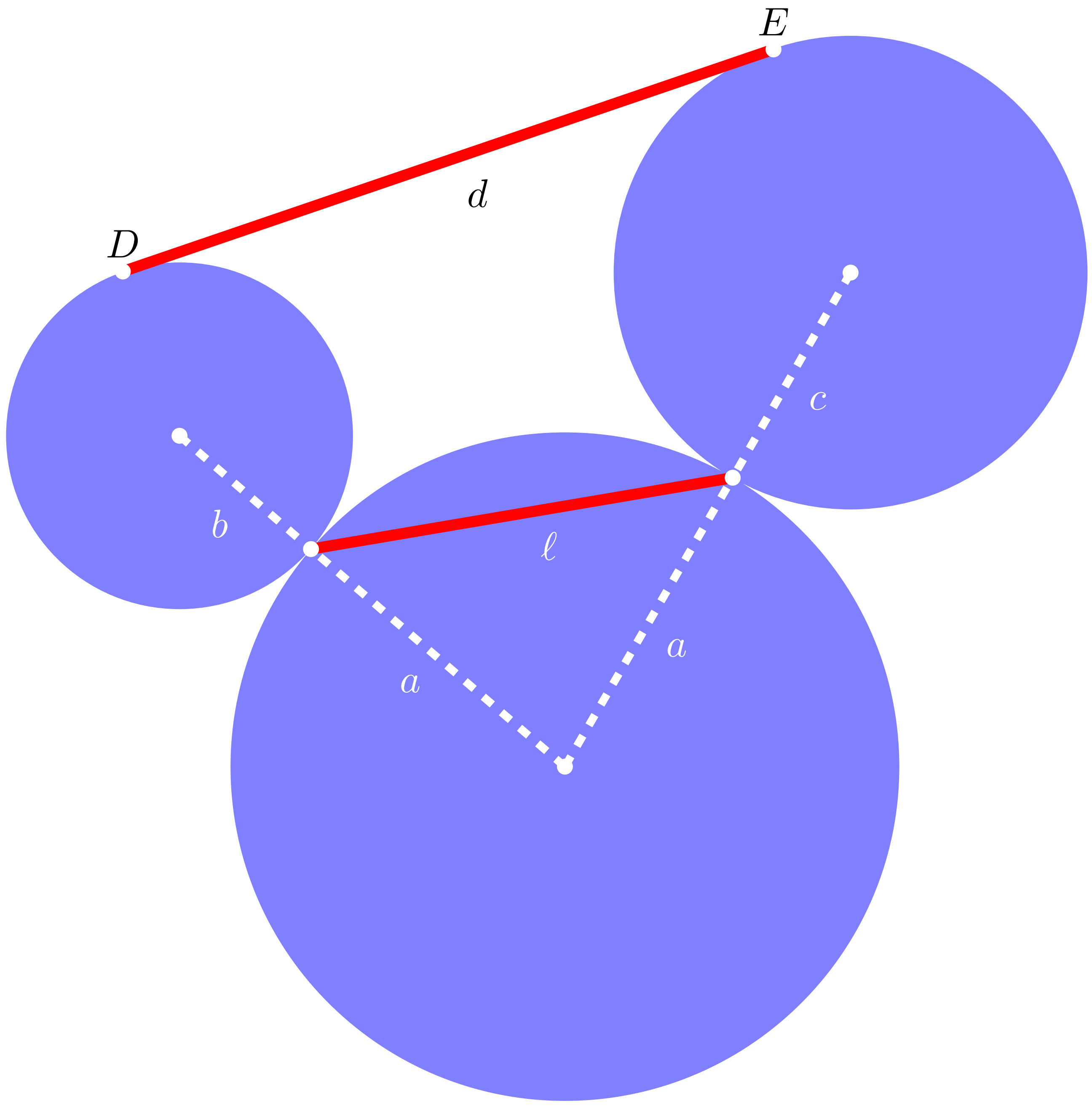
$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$



$$k_4 = 4\left(k_1 + k_2 + \sqrt{k_1 k_2}\right)$$

Este teorema aparece en un *sangaku* y la solución usa un problema famoso en su época.

***Sanen Bōsha* (三円傍斜)**



Calcular ℓ en función de los radios *a*, *b*, *c* y *d*=|*DE*|.

$$\ell^2 = \frac{a^2 d^2}{(a+b)(a+c)}$$

El teorema fue re-descubierto en 1936 por Frederick Soddy*, quien lo publicó en la revista *Nature*.

The Kiss Precise

FOR pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the centre.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

F. SODDY.

$$(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$$

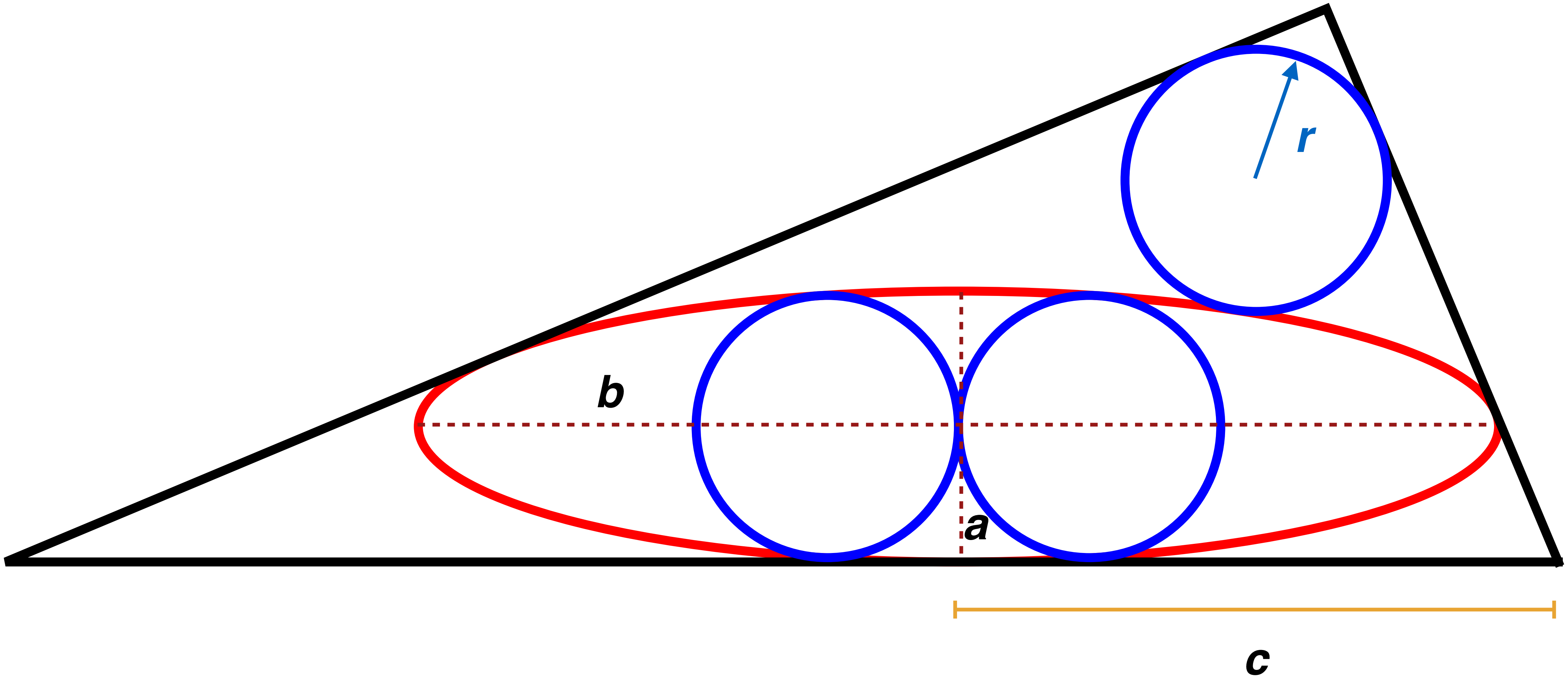
El poema también generaliza a 3 dimensiones :

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2 = 3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2)$$

* Premio Nobel de Química en 1921. Acuñó las palabras "isótopo" y "reacción en cadena".

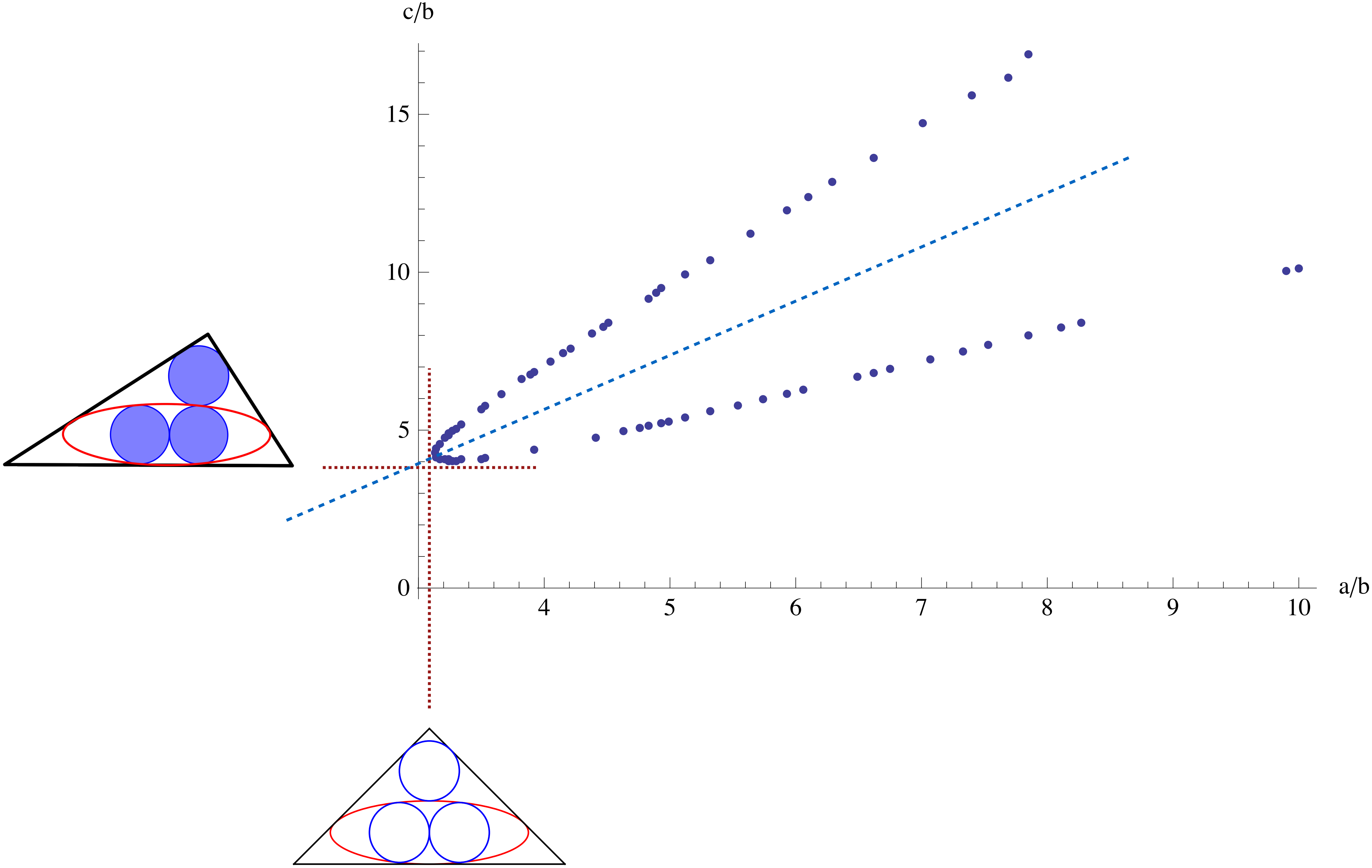
Pero la generalización ya aparece en un *sangaku* del santuario de Samukawa (Kanagawa) en 1822!

Un problema no resuelto



Expresar el radio ***r*** del círculo en función de los semiejes ***a*** y ***b*** de la elipse.

— Sawa Masayoshi (1821)


c/b
15
10
5
0
4
5
6
7
8
9
10
a/b

終